1

FISICA CUANTICA II
CONTROL DE MAYO, CUESTIONES

CURSO 2024/2025 30 de Mayo de 2025

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado.

Esta prueba cuenta un 25% de la nota del control final.

1[2].- Sea $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ un conjunto de tres vectores ortonormales ($\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$) en un espacio de Hilbert tridimensional. Considerese el observable:

$$A = |v_1\rangle\langle v_2| + |v_2\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_3| + |v_3\rangle\langle v_2| \ .$$

Calculense las dispersiones de las medidas de A en los estados $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$ y $|v_3\rangle$.

2[3].- Sean $|x_1\rangle$ y $|x_2\rangle$ dos autovectores del operador posicion X de una particula que se mueve en una dimension ($X|x_i\rangle = x_i\,|x_i\rangle$, $i = 1, 2$). Si P es el operador momento de la particula, obtengase el elemento de matriz:

$$\langle x_1|e^{-P^2}\,|x_2\rangle \ .$$

3[2].- Sea $a^\dagger$ el operador de creacion de un oscilador armonico unidimensional y sean $|n\rangle$ los correspondientes autoestados de su hamiltoniano. Calculese la siguiente traza:

$$\mathrm{Tr}\Big(|0\rangle\langle n|\, e^{\alpha a^\dagger}\Big) \ ,$$

para todo numero real α.

4[3].- Considerese una particula de espin 1 y sean $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ las tres componentes de su operador de espin. Obtengase el valor medio de S_x en el estado rotado:

$$|\psi\rangle = e^{-i\frac{\pi}{6}\,S_y}\,|\chi\rangle \ ,$$

donde $|\chi\rangle$ es el autoestado de S_z con el maximo autovalor.

Sea $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ un conjunto de tres vectores ortonormales ($\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$) en un espacio de Hilbert tridimensional. Considerese el observable

$$A = |v_1\rangle\langle v_2| + |v_2\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_3| + |v_3\rangle\langle v_2|$$

Calculense las dispersiones de las medidas de A en los estados $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$ y $|v_3\rangle$

$$A|v_1\rangle\langle v_2| = |v_2\rangle\underbrace{\langle v_1|v_1\rangle}_{1}\langle v_2| = \boxed{|v_2\rangle\langle v_2|}$$

$$A|v_2\rangle\langle v_1| = |v_1\rangle\underbrace{\langle v_2|v_2\rangle}_{1}\langle v_1| + |v_3\rangle\underbrace{\langle v_2|v_2\rangle}\langle v_1| =$$
$$= \boxed{|v_1\rangle\langle v_1| + |v_3\rangle\langle v_1|}$$

$$A|v_2\rangle\langle v_3| = |v_1\rangle\underbrace{\langle v_2|v_2\rangle}_{1}\langle v_3| + |v_3\rangle\underbrace{\langle v_2|v_2\rangle}\langle v_3| =$$
$$= \boxed{|v_1\rangle\langle v_3| + |v_3\rangle\langle v_3|}$$

$$A|v_3\rangle\langle v_2| = |v_2\rangle\underbrace{\langle v_3|v_3\rangle}_{1}\langle v_2| = \boxed{|v_2\rangle\langle v_2|}$$

$\Rightarrow$

$$A^2 = |v_2\rangle\langle v_2| + |v_1\rangle\langle v_1| + |v_3\rangle\langle v_1| + |v_1\rangle\langle v_3| + |v_3\rangle\langle v_3| + |v_2\rangle\langle v_2|$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{A^2 = |v_1\rangle\langle v_1| + 2|v_2\rangle\langle v_2| + |v_3\rangle\langle v_3| + |v_3\rangle\langle v_1| + |v_1\rangle\langle v_3|}$$

$$(\Delta_{v_1}A)^2 = \langle v_1|A^2|v_1\rangle - (\langle v_1|A|v_1\rangle)^2 = 1 - 0 = 1$$

$$(\Delta_{v_2}A)^2 = \langle v_2|A^2|v_2\rangle - (\langle v_2|A|v_2\rangle)^2 = 2 - 0 = 2$$

$$(\Delta_{v_3}A)^2 = \langle v_3|A^2|v_3\rangle - (\langle v_3|A|v_3\rangle)^2 = 1 - 0 = 1$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\Delta_{v_1}A = 1} \qquad \boxed{\Delta_{v_2}A = \sqrt{2}} \qquad \boxed{\Delta_{v_3}A = 1}$$

Sean $|x_1\rangle$ y $|x_2\rangle$ dos autovectores del operador posicion X de una particula que se mueve en una dimension ($X|x_i\rangle = x_i|x_i\rangle$, $i=1,2$). Si P es el operador momento de la particula, obtengaze el elemento de matriz

$$\langle x_1|e^{-P^2}|x_2\rangle$$

$$\langle x_1|e^{-P^2}|x_2\rangle = \int dp\, \underbrace{\langle x_1|e^{-P^2}|p\rangle}_{e^{-p^2}\langle x_1|p\rangle = \frac{e^{-p^2}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i/\hbar\, p x_1}} \langle p|x_2\rangle =$$

$$1 = \int dp\, |p\rangle\langle p|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-p^2} e^{i/\hbar\, p x_1} \underbrace{\langle p|x_2\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i/\hbar\, p x_2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-p^2} e^{i/\hbar\, p(x_1-x_2)}}_{\sqrt{2\pi}\, F\left(e^{-p^2}, \frac{x_1-x_2}{\hbar}\right) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{4\hbar^2}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\pi}}_{\frac{1}{2\sqrt{\pi}\hbar}}\, e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{4\hbar^2}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\langle x_1|e^{-P^2}|x_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\hbar} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{4\hbar^2}}}$$

Frost

Sea a^+ el operador de creacion de un oscilador armonico unidimensional y sean $|n\rangle$ los correspondientes autoestados de la energia. Calculese la siguiente traza

$$T_r\left[|0\rangle\langle n|\, e^{\alpha a^+}\right] \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$T_r\left[|0\rangle\langle n|\, e^{\alpha a^+}\right] = \langle n|\, e^{\alpha a^+}|0\rangle =$$

$$= \langle n| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\, \alpha^p \underbrace{(a^+)^p|0\rangle}_{\sqrt{p!}\,|p\rangle} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p!}}\, \alpha^p \underbrace{\langle n|p\rangle}_{\delta_{p,n}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha^p}{\sqrt{p!}}\, \delta_{p,n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_r\left[|0\rangle\langle n|\, e^{\alpha a^+}\right] = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}}$$

Considerese una particula de espin 1 y sean (S_x, S_y, S_z) las tres componentes de su operador de espin. Obtengase el valor medio de S_x en el estado rotado

$$|\psi\rangle = e^{-i\frac{\pi}{6\hbar}S_y}|\chi\rangle$$

siendo $|\chi\rangle$ el estado de la particula con el maximo valor de S_z

---

Queremos calcular

$$\langle\psi|S_x|\psi\rangle = \langle\chi|\, e^{i\frac{\pi}{6\hbar}S_y} S_x e^{-\frac{i\pi}{6\hbar}S_y}|\chi\rangle$$

En general

$$e^{i\phi S_y/\hbar} S_x e^{-\frac{i\phi S_y}{\hbar}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^n \underbrace{[S_y, S_x]_n}_{\text{conmutador iterado}}$$

$$[S_y, S_x]_1 = i\hbar \underbrace{\varepsilon_{213}}_{-1} S_z = -i\hbar S_z$$

$$[S_y, S_x]_2 = -i\hbar \underbrace{[S_y, S_z]}_{i\hbar S_x} = \hbar^2 S_x$$

$$\Rightarrow \boxed{[S_y, S_x]_{2K} = (\hbar)^{2K} S_x} \qquad \boxed{[S_y, S_x]_{2K+1} = -i(\hbar)^{2K+1} S_z}$$

$$e^{i\phi S_y/\hbar} S_x e^{-\frac{i\phi S_y}{\hbar}} = \underbrace{\left(\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{(2K)!}\frac{(i)^{2K}}{\cancel{(\hbar)^{2K}}}\phi^{2K}\cancel{(\hbar)^{2K}}\right)}_{\cos\phi} S_x +$$

$$+\underbrace{\left(\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{(2K+1)!}\frac{i^{2K+1}\phi^{2K+1}}{\cancel{(\hbar)^{2K+1}}}(-i)\cancel{(\hbar)^{2K+1}}\right)}_{\text{sen}\,\phi} S_z$$

$$\boxed{e^{i\phi S_y/\hbar} S_x e^{-\frac{i\phi S_y}{\hbar}} = \cos\phi\, S_x + \text{sen}\,\phi\, S_z}$$

$$\to e^{i\frac{\pi}{6}S_y} S_x e^{-i\frac{\pi}{6}S_y} = \underbrace{\cos(\pi/6)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} S_x + \underbrace{\text{sen}(\pi/6)}_{1/2} S_z$$

Tomado $|\chi\rangle = |1,1\rangle \rightarrow s=1,\ m=1$

$\Rightarrow$

$$\langle\psi|S_x|\psi\rangle = \langle 1,1|\left(\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2} S_x} + \frac{1}{2} S_z\right)|1,1\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\langle 1,1| S_z |1,1\rangle}_{\hbar} = \hbar/2$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\langle\psi|S_x|\psi\rangle = \hbar/2}$$